TARIFICATION, PROVISIONNEMENT ET PILOTAGE D'UN PORTEFEUILLE DÉPENDANCE

Marie-Pascale Deléglise, Christian Hess, Sébastien Nouet

TARIFICATION, PROVISIONNEMENT ET PILOTAGE D'UN PORTEFEUILLE DÉPENDANCE[1]

Marie-Pascale DELÉGLISE[2]

Christian HESS[3][4]

Sébastien NOUET[5]

RÉSUMÉ

À partir des résultats de l'enquête ``Handicap-Incapacités-Dépendance" du Ministère de la Santé et des scénarios d'évolution future de la dépendance des personnes âgées, publiés par la DREES[6], on examine de manière prospective la tarification, le provisionnement et l'équilibre des comptes relatifs à un portefeuille de contrats dépendance. Les méthodes et les résultats présentés ont pour but d'aider l'assureur à piloter le portefeuille en fonction de l'évolution de l'environnement démographique et financier.

SUMMARY:

Based on the report ``Handicap-Incapacités-Dépendance" of the French ``Ministère de la Santé" and on the DREES scenarios for the disability of elder persons, the rating, the reserving and the financial balance relative to such a disability porfolio are examined in a prospective approach. The methods and the results aim at helping the insurer to control the portfolio according to the evolution of the demographic and financial environment.

MOTS-CLÉS :

Assurance dépendance, incidence, prévalence, tables prospectives, provisions techniques, bénéfices financiers, loi de chute.

1. INTRODUCTION

En France et dans d'autres pays développés, plusieurs études laissent prévoir un accroissement du phénomène de dépendance au cours des prochaines années. Cela

---

[1]Ce travail a été amorcé à CAPA Conseil et a bénéficié du soutien de la chaire Risques et Chances de la Transition Démographique de la Fondation du Risque de Paris Dauphine

[2]CNP Assurances

[3]Université Paris Dauphine, Centre de recherche Stratégies et Dynamiques Financières (SDFi), Master d'Actuariat

[4] Auteur correspondant : Christian HESS - Département MIDO, Mathématiques - Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny - 75775 PARIS CEDEX 16 - Christian.Hess@dauphine.fr

[5] Université Paris Dauphine, CREA-SDFi et Centre de la Recherche de l'EMLV

[6]Direction de la Recherche, des Études, de l'Évaluation et des Statistiques (Sécurité Sociale)

s'explique par le vieillissement de la population qui lui-même est dû à deux causes principales :

- les progrès de l'hygiène et de la médecine qui ont permis l'allongement de l'espérance de vie
- la forte natalité sur la période 1945-1965, communément dénommée ``baby-boom'', suivie par une période de natalité faible, entrainera l'accroissement du nombre de personnes âgées dans la population quelques décennies plus tard.

L'enquête ``Handicaps-Incapacités-Dépendance'' (HID), menée en France dans les années 1990, a montré que l'effectif de la population des personnes dépendantes allait connaître une augmentation significative. Ce phénomène soulève la question de l'assurabilité du risque dépendance et donc de la viabilité des produits dépendance proposés en France par les assureurs. Autrement dit, l'éventualité d'un accroissement du phénomène de dépendance représente-t-elle pour l'assureur une opportunité ou, au contraire, représente-t-elle pour lui un risque difficile à appréhender, voire non assurable ? Face à cette question, la tarification et le provisionnement de ce risque devront être examinés d'une manière prospective. De plus, afin d'avoir une image précise de l'équilibre des comptes de l'assureur, d'autres éléments devront être pris en compte tels que les bénéfices financiers et les abandons de contrat (chutes), assez fréquents pour ce type de risque, ces deux éléments contribuant à corriger un déséquilibre éventuel. Le sujet de la dépendance a déjà été abordé dans plusieurs articles ou mémoires. Nous en citons quelques uns dans la bibliographie, sans toutefois prétendre à l'exhaustivité.

Notre travail a trois objectifs principaux. Le premier est de montrer comment, à partir de statistiques nationales qui fournissent les taux de prévalence, on peut évaluer le risque de dépendance dans la population française. Le deuxième est d'étudier l'évolution future des coûts de la dépendance en nous basant sur les scénarios prospectifs envisagés par la DREES. Cela nous conduit, en troisième lieu, à proposer une approche pour le pilotage de portefeuilles de risques dépendance. Dans un souci de simplification, nous avons limité le champ de l'étude à la dépendance totale et permanente. Par ailleurs, nous avons choisi d'expliciter de manière assez précise les arguments actuariels et statistiques pour éviter que l'article ne puisse être lu que par des experts de la dépendance.

L'article est organisé de la manière suivante. Après avoir situé le problème de la dépendance des personnes âgées dans le contexte démographique actuel, on explique les raisons du choix de l'approche forfaitaire, adoptée dans ce travail. On introduit aussi les grandeurs actuarielles du modèle, spécialement la prévalence, l'incidence et le taux de mortalité des dépendants. On montre comment estimer simplement les taux de prévalence dans la population française pour l'année 2000, ceci à partir de l'enquête HID. Un ajustement en fonction de l'âge est aussi proposé. Les deux expressions permettant le calcul de la prime d'assurance dépendance sont alors rappelées et discutées en liaison avec une relation entre l'incidence et la prévalence. L'étude prospective est ensuite abordée en référence à des scénarios d'évolution de la dépendance, considérés dans l'enquête HID. On complète ces scénarios par des hypothèses sur l'évolution des taux d'intérêt. Dans ce cadre élargi, on examine sur un exemple type comment sont susceptibles de varier les tarifs et les provisions techniques de l'assureur. Cela est complété par l'étude du rôle des bénéfices financiers et des abandons de contrats.

2. DÉFINITION DE LA DÉPENDANCE

Pour décrire les conséquences du vieillissement chez les personnes âgées ou des maladies dégénératives de l'âge adulte, il existe plusieurs termes qui recouvrent des réalités différentes. On parle en effet de dépendance, d'invalidité, d'incapacité, de handicap, de perte d'autonomie, de déficience, etc. C'est la définition des professionnels de la santé que nous retiendrons : *``Sont dépendantes les personnes adultes qui dépendent d'une autre pour les actes de la vie quotidienne, que ce soit les actes élémentaires de la vie courante (s'habiller, faire sa toilette, s'alimenter, se déplacer) ou les tâches domestiques (faire ses courses, préparer des repas, prendre ses médicaments)".* Dans ce travail, nous nous limiterons au cas de la *dépendance permanente et totale* des personnes âgées de 55 ans au moins et c'est dans ce sens que nous emploierons le terme de *dépendance.*

La dépendance peut être permanente ou temporaire. La dépendance permanente concerne les personnes adultes qui dépendent d'une autre, de manière définitive, pour les actes de la vie quotidienne. La dépendance permanente peut-être à son tour segmentée en deux catégories : la dépendance totale et la dépendance partielle.

2.1 La grille AGGIR

Plus précisément, les personnes dépendantes sont classées à l'intérieur de la grille Autonomie Gérontologie-Groupes Iso-Ressources (AGGIR). Cette grille constitue aujourd'hui l'outil officiel d'évaluation de la dépendance en France. Elle se décompose en cinq catégories GIR 1 à GIR 5. Les niveaux GIR 1 et 2 représentent la dépendance totale, tandis que les niveaux GIR 3, 4, et 5 caractérisent la dépendance partielle. La dépendance totale est aussi appelée ``lourde''.

Comme indiqué précédemment on s'intéresse essentiellement à la dépendance totale, c'est à dire à celle codifiée par les niveaux GIR 1 et 2. En France, ce risque est couvert par les assureurs et prend surtout en charge ce qu'il est convenu d'appeler le ``nursing''. Les frais médicaux quant à eux sont généralement pris en charge par la Sécurité Sociale et les complémentaires Santé.

3. LE CONTEXTE DÉMOGRAPHIQUE

Les chiffres donnés ci-dessous permettent de prendre la mesure de l'allongement de l'espérance de vie, de l'accroissement de la population des seniors et de l'impact de ce vieillissemnt sur le phénomène de dépendance.

On sait aujourd'hui que l'espérance de vie s'accroît de 3 mois chaque année. En 1998 par exemple, cette évolution se traduisait par un gain de 1,9 ans par rapport à 1990 pour les hommes et de 1,3 ans pour les femmes (cf. tableau ci-dessous).

Année	1968	1978	1988	1990	1995	1998
Hommes	67,8	69,8	72,3	72,7	73,9	74,6
Femmes	75,2	77,9	80,5	80,9	81,9	82,2
Taux de mortalité	1,10%	1,02%	0,93%	0,93%	0,91%	0,92%

Tableau 1 - Évolution de l'espérance de vie de 1968 à 1998 (en années)[1]

Des projections de la pyramide des âges permettent d'estimer l'évolution de l'espérance de vie en 2025 à 81,2 ans pour les hommes et 87,4 ans pour les femmes, soit un gain de durée de vie d'environ 6 ans par rapport à 1998.

L'augmentation de la proportion des seniors a également été soulignée. Au 1er janvier 1998, la population totale de la France métropolitaine était estimée à 58,7 millions d'habitants, dont 11,9 millions de personnes âgées de 60 ans ou plus, dont 4 millions d'au moins 75 ans. Les personnes âgées de 60 ans ou plus, représentaient donc déjà plus de 20% de la population française. Si l'on s'en tient aux prévisions de l'INSEE, la proportion des plus de 60 ans dépassera 25% en 2020. D'ici à 2025, le nombre de seniors français devrait

[1] Source : INSEE Bilan démographique 98, Février 1999 - INED Population et Société, Mars 99

croître de façon considérable (+48%) pour atteindre près de 14,5 millions de personnes. Quant au nombre de seniors les plus âgés (plus de 80 ans), il fera plus que tripler par rapport à l'an 2000 en passant de 2,1 millions à près de 7 millions en 2040. La France comptait 10.000 centenaires en 2001, et en comptera plus de 150.000 en 2050.

Quant à la population dépendante, plusieurs évaluations ont été données par l'enquête HID déjà citée. Par des techniques de sondage, l'effectif de cette population a été évalué en 2000 à environ 800.000 personnes. De cette enquête, on a pu aussi déduire des projections sur l'évolution future de la population dépendante. En particulier, on a pu prévoir un accroissement de la dépendance en France, spécialement au sens de la dépendance lourde (GIR 1 et 2). Plusieurs scénarios que nous décrirons plus loin ont été envisagés. Selon certains de ces scénarios, dits *dynamiques,* le nombre des personnes dépendantes atteindrait 1.050.000, voire 1.400.000, en 2040. Il connaîtrait une augmentation comprise entre 30% et 80% environ. Selon un autre scénario, dit *statique,* la population dépendante atteindrait même 2.100.000 en 2040.

4. APPROCHE INDEMNITAIRE ET APPROCHE FORFAITAIRE

Afin de déterminer le montant de la prime d'un contrat dépendance, les deux composantes de la sinistralité, fréquence (ou nombre) et coût, doivent être estimées. Le risque dépendance étant un risque long, l'assureur doit être en mesure, non seulement d'estimer ces deux composantes à une époque donnée, mais aussi d'en prévoir l'évolution future. À défaut, l'assurabilité du risque dépendance pourrait poser problème. En ce qui concerne le coût de sinistre, beaucoup d'assureurs ont contourné la difficulté de prévision en proposant des contrats dont la garantie en cas de sinistre est forfaitaire plutôt qu'indemnitaire. En effet, dans le cadre de la garantie indemnitaire l'assureur doit rembourser à l'assuré le montant total des dépenses occasionnées par le sinistre, autrement dit par l'entrée en dépendance et ses conséquences. Si la garantie prévue au contrat est forfaitaire, l'assureur ne versera à l'assuré qu'une rente viagère de montant fixé à l'avance, ceci à partir de l'entrée en dépendance, quel que soit le montant des dépenses occasionnées par le sinistre. Le seul aléa subsistant alors pour l'assureur réside dans la durée de versement de cette annuité.

Dans ce travail nous nous bornerons à examiner le cas de l'approche forfaitaire. Nous verrons que la composante ``fréquence des sinistres'' peut être convenablement estimée. Quant à son évolution future plusieurs scénarios seront envisagés, ce qui nous amènera à examiner les risques de sous-tarification et de sous-provisionnement pour un groupe de contrats dépendance. On raisonnera par rapport à un produit d'assurance dépendance très répandu, à savoir la rente viagère à partir de la date d'entrée en dépendance si cette dernière survient. Nous nous baserons sur les différents scénarios médico-sociaux du Ministère de la Santé. Comme on l'a déjà indiqué, nous nous limiterons au cas de la dépendance totale ou lourde, segment de la dépendance la plus grave et essentiellement couvert en France par le secteur de l'assurance.

5. LA PRÉVALENCE, L'INCIDENCE ET LA MORTALITÉ DES DÉPENDANTS

Dans l'étude statistique de la dépendance, deux indicateurs sont utilisés : la prévalence et l'incidence. Pour un âge donné, la *prévalence* est définie comme la proportion des personnes dépendantes dans une certaine population et *l'incidence*, comme la probabilité de devenir dépendant. Par conséquent, la prévalence représente un stock de personnes dépendantes à un âge ou pour un intervalle d'âges donné, tandis que l'incidence représente un flux entre deux âges consécutifs.

D'après l'enquête HID, on estime à 10% de la population générale la prévalence à 80 ans pour la dépendance des niveaux GIR 1 à 4. La prévalence pour le risque de dépendance totale (GIR 1 et 2) est estimée à 4% au même âge. Quant à l'incidence à l'âge de 80 ans, elle est de l'ordre de 2,1% pour la dépendance totale.

L'incidence et la prévalence sont liées par une relation qui sera donnée plus loin et qui met en jeu la loi de mortalité générale et celle des dépendants. Ces lois interviendront dans la tarification et le provisionnement du risque dépendance. Toutefois, d'autres éléments devront être utilisés. En ce qui concerne la mortalité, nous utiliserons les tables de l'INED de 2000, 2010, 2020, 2030 et 2040. Le taux d'intérêt technique sera également nécessaire pour déterminer la prime et les provisions techniques. Le taux de rendement des produits financiers, notamment le taux d'intérêt du marché obligataire, interviendra quant à lui pour évaluer la viabilité du contrat dépendance, ainsi que sa rentabilité.

L'incidence et la prévalence, de même que les lois de mortalité et le taux d'intérêt technique, sont susceptibles d'évoluer au cours du temps, ce qui va modifier l'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré, ainsi que l'engagement de l'assuré vis-à-vis de l'assureur. En ce qui concerne l'actif, l'évolution des taux d'intérêt sur le marché obligataire, comme celle des autres placements, influera sur les bénéfices financiers.

5.1 Les fonctions actuarielles du modèle

Le produit d'assurance considéré ici s'adresse aux personnes non dépendantes et la garantie consiste dans versement d'une rente viagère en cas d'entrée en dépendance. Il n'y a pas de composante d'épargne. En contrepartie, l'assuré s'engage à verser une cotisation annuelle à l'assureur, tant qu'il est vivant et valide. L'assureur mutualise les risques au niveau de son portefeuille. Tous les assurés ne deviendront pas dépendants au cours de leur vie, car la plupart d'entre eux décèderont sans être devenus dépendants.

Les contrats seront supposés souscrits en début d'année par des assurés dont l'anniversaire tombe le 1^{er} janvier et la date de souscription sera prise pour origine du temps. Les notations suivantes, conformes à la notation actuarielle internationale, seront utilisées.

${}_k p_x^a =$ probabilité pour l'individu, d'âge x à une époque prise pour origine (époque 0), de vivre jusqu'à l'époque k, autrement dit jusqu'à l'âge $x+k$ sans devenir dépendant, (a comme *actif,* synonyme de non dépendant).

${}_k q_x^a =$ probabilité pour l'individu valide, d'âge x à l'époque 0, de décéder avant l'époque k sans transiter par un état de dépendance.

${}_k p_x^i =$ probabilité de survie jusqu'à l'époque k pour un individu d'âge x déjà dépendant à l'époque 0 (i comme *invalide*, synonyme de dépendant).

${}_k q_x^i =$ probabilité de décès avant l'époque k pour un individu d'âge x déjà dépendant à l'époque 0.

${}_k p_x =$ probabilité de survie jusqu'à l'époque k pour un individu d'âge x en début d'année, issu de la population générale, qu'il soit invalide ou non.

${}_k q_x =$ probabilité de décès avant l'époque k pour un individu d'âge x, issu de la population générale, qu'il soit invalide ou non à l'époque 0.

Lorsque $k=1$, on omet l'indice de gauche, conformément à la notation actuarielle internationale.

$i_x =$ taux d'incidence à l'âge x ; il est égal à la probabilité pour un individu d'âge x en début d'année de devenir dépendant dans l'année et d'être vivant en fin d'année. Ainsi, le décès d'un individu entré en dépendance au cours d'une année donnée ne peut se produire au plus tôt que l'année suivante.

$j_x =$ taux de prévalence à l'âge x. C'est la proportion des personnes dépendantes dans la population générale. Au stade où nous en sommes, cette définition est suffisante, mais nous serons amenés à la préciser à la section 6.

On suppose également qu'une personne dépendante ne peut redevenir valide, ce qui est conforme à l'observation, dans le cas la dépendance totale à laquelle nous restreignons notre attention

Pour un individu vivant et valide à l'âge x, il y a trois états possibles à l'âge $x+1$, à savoir :

- être vivant et valide avec probabilité p_x^a,
- être décédé (sans être devenu dépendant) avec probabilité q_x^a,
- être devenu dépendant avec probabilité i_x (on suppose donc qu'il sera encore vivant et dépendant en fin d'année).

Pour un individu dépendant vivant à l'âge x deux cas sont possibles à l'âge $x+1$:

- être vivant (et dépendant) avec probabilité p_x^i,
- être décédé avec probabilité q_x^i.

Les notations suivantes sont également utiles :

$l_x =$ nombre moyen de personnes (dépendantes ou non) vivantes à l'âge x,

$l_x^a =$ nombre moyen de survivants valides à l'âge x,

$l_x^i =$ nombre moyen de survivants dépendants à l'âge x,

Par exemple, la prévalence à l'âge x peut s'écrire

$$j_x = \frac{l_x^i}{l_x}$$

Les taux d'incidence et de prévalence interviendront directement dans l'étude de la tarification des produits d'assurance dépendance, notamment pour évaluer le coût de la rente viagère différée.

Compte tenu des hypothèses faites, les quantités introduites précédemment sont liées par les relations ci-après

$$p_x^a + q_x^a + i_x = 1 \qquad et \qquad p_x^i + q_x^i = 1$$

Nous verrons à la section 6 que d'autres relations existent entre l'incidence et prévalence (formules (2) et (3)).

5.2 Modélisation du taux de mortalité des dépendants

Le taux de mortalité des dépendants est généralement supérieur à celui de la population générale. Nous utilisons la formule établie par la SCOR en 1995 (voir [1]). Pour chaque âge x, ce taux s'exprime comme une fonction affine du taux de mortalité générale, soit

$$q_x^i = \alpha q_x + \beta \qquad (1)$$

Dans cette égalité, les q_x sont ceux de la table TD 88-90. Le coefficient α traduit une surmortalité multiplicative liée à l'état de dépendance. Quant à β, c'est un coefficient de surmortalité additive. On peut le voir comme traduisant la surmortalité liée à l'état de dépendance de la personne, mais non à son âge. Les coefficients α et β ont été supposés indépendants de l'âge et leur estimation a conduit à $\alpha = 2$ et $\beta = 0{,}035$.

Dans l'étude prospective que nous allons effectuer, nous supposerons pour simplifier que la même formule s'applique, avec les mêmes valeurs des paramètres, pour tous les scénarios envisagés et nous nous baserons, comme cela a été fait à la SCOR, sur les tables TD 88-90. À la section 7.5 nous examinerons brièvement l'influence d'éventuelles variations des q_x^i sur le montant de la prime d'assurance dépendance.

Comparaison avec une loi de mortalité plus récente

La loi SCOR est assez ancienne. Les lois de mortalité pour les dépendants font maintenant intervenir deux variables : l'âge et l'ancienneté en dépendance. On peut citer par exemple la loi de maintien donnée par la FFSA [6] qui, en outre, distingue la population masculine et la population féminine. Nous avons utilisé chacune de ces deux tables afin de calculer la valeur actuelle probable des rentes de dépendance. Il s'avère que, pour les âges inférieurs à 91 ans pour les femmes et à 96 ans pour les hommes, l'annuité calculée par la loi SCOR est nettement supérieure à la loi FFSA. Cela est illustré par le tableau suivant :

	hommes		femmes	
âge	annuité FFSA	annuité SCOR	annuité FFSA	annuité SCOR
60	0,92003	8,26928	0,61843	8,26928
65	1,18579	7,06515	0,70288	7,06515
70	1,54814	5,75500	0,83326	5,75500
75	1,87260	4,43900	1,03947	4,43900
80	1,82825	3,21619	1,25098	3,21619
85	1,50349	2,22117	1,36242	2,22117
90	1,18001	1,47424	1,35581	1,47424
95	0,94833	0,98560	1,26461	0,98560

Tableau 2 - Valeur actuelle probable de la rente de dépendance (pour une unité de rente) (taux d'intérêt technique 2,50%)

La loi de mortalité de la SCOR apparaît donc comme plus prudente que celle de la FFSA, d'autant plus que les contrats dépendance sont rarement souscrits au-delà de 70 ou 75 ans. Dans la suite de ce travail, nous utiliserons la loi SCOR.

5.3 Estimation et ajustements des taux de prévalence pour l'année 2000

Le taux de prévalence pour chaque âge est estimé à partir de l'enquête HID du Ministère de la Santé. Comme indiqué précédemment, elle est basée sur un recensement de la population dépendante effectué par l'INSEE en 1999 parmi les personnes âgées de 60 ans et plus. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-après, qui répartit les effectifs par classe d'âges décennale à l'intérieur de chaque niveau GIR.

GIR	60 à 69 ans	70 à 79 ans	80 à 89 ans	90 ans et plus	Total
1 ou 2	37 788	78 178	125 602	89 031	330 599
3	26 161	52 713	78 583	43 397	200 854
4	47 769	78 922	97 270	40 296	264 257
5	121 881	151 117	114 267	43 861	431 126
6	5 199 143	4 136 743	1 288 656	190 175	10 814 717
Total	5 432 742	4 497 673	1 704 378	406 760	12 041 553

Tableau 3 - Répartition des personnes âgées de 60 ans et plus dans la grille AGGIR[1]

L'effectif de la population des 60 ans et plus de l'année 2000 est évalué par l'INSEE à 5.429.955 personnes, soit une différence relative par rapport à l'enquête HID de 1999 (soit 5.432.742) inférieure à 0,1%. Des raisons d'homogénéité conduisent, pour obtenir le quotient de la population dépendante, à utiliser les chiffres fournis par l'INSEE. En effet, dans ce qui suit, le calcul de la moyenne de chacune des classes d'âges s'appuie sur la répartition âge par âge fournie par l'INSEE, mais absente dans l'enquête HID. La proportion des personnes dépendantes de 0,70% de la classe des 60 à 69 ans est restituée par le ratio entre 37.788 et 5.429.955. En effectuant la même démarche pour les trois autres classes d'âges, on obtient les estimations suivantes :

- 1,71% pour la catégorie des 70-79 ans,
- 7,35% pour la catégorie des 80-89 ans,
- 20,83% pour la catégorie des plus de 90 ans.

[1] Sources : INSEE, enquêtes HID 1998 et 1999.

Afin d'évaluer les taux de prévalence pour chaque âge entier, on procède à un ajustement pour les âges de 60 à 99 ans. Pour cela, on suppose que chacun des quatre taux de prévalence décennaux représente la prévalence de la moyenne spécifique à chacune des classes d'âges décennales. La moyenne relative à une classe d'âge décennale est par définition l'âge moyen des individus de cette classe. Par exemple, pour la catégorie des 60-69 ans, l'âge moyen est de 64,5 années. Il ne s'agit pas du centre de la classe, car dans le calcul de la moyenne, les âges sont pondérés par les effectifs. Ainsi, pour la catégorie des 90 ans et plus, la moyenne de cette classe est de 92,67 ans. On calcule donc la moyenne pondérée de chaque classe, à laquelle on associe le pourcentage de dépendants calculé pour la classe d'âges décennale associée. On obtient alors le tableau ci-après

Classe d'âges	Age moyen	Taux de prévalence décennale
60-69 ans	64,50 ans	0,70%
70-79 ans	74,27 ans	1,71%
80-89 ans	84,20 ans	7,35%
90 ans et plus	92,67 ans	20,83%

Tableau 4 - Taux de prévalence en fonction de l'âge

La représentation dans un plan des quatre points :

$A(64,50;0,70\%)$; $B(74,27;1,71\%)$; $C(84,20;7,35\%)$; $D(92,67;20,83\%)$,

montre que ceux-ci ne sont pas alignés. On considère maintenant en ordonnée le logarithme des taux de prévalence. Cette fois la représentation des quatre points

$A'(64,50\,;\ln(0,70\%))$; $B'(74,27;\ln(1,71\%))$; $C'(84,20;\ln(7,35\%))$ *et* $D'(92,67;\ln(20,83\%))$,

fait apparaître qu'ils sont sensiblement alignés.

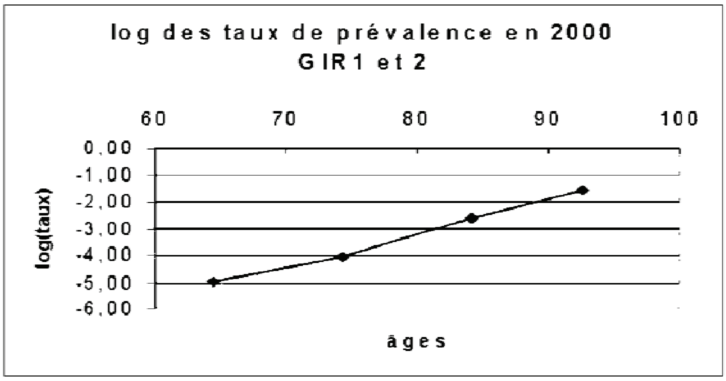

Figure 1

On détermine les estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$, de a et b respectivement, par la méthode des moindres carrés sur le modèle

$$\ln(y) = ax + b$$

sous les hypothèses habituelles. On obtient $\hat{a} = 0{,}12314$ et $\hat{b} = -13{,}019$. De manière équivalente cette équation peut s'écrire

$$y = B\exp(ax)$$

avec $\hat{B} = \exp(\hat{b}) = 2{,}216\,10^{-6}$. Le coefficient de corrélation linéaire R^2 est supérieur à 0,99. On retiendra donc ce modèle pour estimer les taux de prévalence en 2000 entre les âges moyens du tableau ci-dessus.

La validation de ce résultat obtenu sur bases INSEE et HID est confirmée en vérifiant que le modèle approxime bien la population dépendante recensée par l'enquête HID. Notre taux de prévalence prévoyait un nombre de 350.530 dépendants pour l'an 2000 alors que l'enquête HID en recense 330.599. Le modèle fournit donc un résultat correct avec une erreur d'environ 5,5%, écart relatif faible compte tenu des aléas sur les mesures.

6. PRIME D'UN CONTRAT DÉPENDANCE ET VARIABILITÉ DES RÉSULTATS

On commence par établir des égalités importantes qui relient incidence et prévalence, puis on indique les formules de calcul des primes, ainsi que la variance du résultat d'un contrat dépendance.

6.1 Relations entre incidence et prévalence

Le résultat suivant montre que l'incidence peut s'exprimer en fonction de la prévalence, du taux de survie dans la population générale et du taux de survie des dépendants.

Proposition 6.1 *Sous les hypothèses précédentes on a l'égalité*

$$i_x = \frac{j_{x+1}\, p_x - j_x\, p_x^i}{1 - j_x} \tag{2}$$

Démonstration. L'incidence à l'âge x est le quotient de la différence entre les nombres de dépendants à l'âge $x+1$ et l'âge x par le nombre de non dépendants à l'âge x, soit

$$i_x = \frac{l_{x+1}^i - l_x^i\, p_x^i}{(1 - j_x) l_x}$$

d'où, en divisant numérateur et dénominateur par l_x,

$$i_x = \frac{\frac{l^i_{x+1}}{l_{x+1}}\frac{l_{x+1}}{l_x} - \frac{l^i_x}{l_x}p^i_x}{1-j_x}$$

ce qui donne bien la formule annoncée.

C.Q.F.D.

Remarque 6.1 *D'autres conventions sont possibles pour définir la prévalence et l'incidence, ce qui conduit à des variantes de la formule (2). Par exemple, il existe une variante de cette formule dans laquelle le facteur* $(1-0,5q^i_x)$ *apparaît au dénominateur, ce qui correspond à l'hypothèse d'entrée en dépendance en milieu d'année. Toutefois, cela ne modifie pas sensiblement les résultats numériques.*

Inversement, il est possible de calculer la prévalence à partir de l'incidence. Étant donné que le taux de prévalence correspond à un stock alimenté par le flux des entrées en dépendance, on doit au préalable fixer un âge initial x_0 à partir duquel on commence à compter les dépendants. Cela conduit à introduire pour la prévalence la notation plus précise $j_x(x_0)$ qui mentionne explicitement x_0. Dans ces conditions, l'égalité suivante est vérifiée

$$j_x(x_0) = \frac{1}{l_{x_0}}\sum_{y=x_0}^{x} l_y\ i_y\ {}_{x-y}p^i_y = \sum_{y=x_0}^{x} {}_{y-x_0}p_{x_0}\ i_y\ {}_{x-y}p^i_y \qquad (3)$$

Dans l'expression précédente, on fait la somme de toutes les personnes entrées en dépendance à un âge y compris entre x_0 et x, et qui sont encore en vie à l'âge x.

Remarque 6.2 (*i*) *Si l'âge initial de décompte* x_0 *est remplacé par* x_1, *avec* $x_1 > x_0$, *alors la prévalence à un âge* $x > x_1$ *est modifiée et l'on a de manière précise*

$$j_x(x_0) - j_x(x_1) = \frac{1}{l_{x_0}}\sum_{y=x_0}^{x_1-1} l_y\ i_y\ {}_{x-y}p^i_y \qquad (4)$$

On voit en particulier que $j_x(x_0) > j_x(x_1)$ quel que soit $x > x_1$.

(ii) Des études récentes ont établi que la mortalité des dépendants est influencée, non seulement par l'âge, mais aussi par l'ancienneté dans l'état de dépendance. Cela a permis la construction de tables de mortalité des dépendants fonction de ces deux grandeurs ou, ce qui est équivalent, l'élaboration de lois de maintien. Citons par exemple les Cahiers Techniques de la FFSA [6]. Une application numérique permettant de comparer la loi de maintien la FFSA et celle de la SCOR a été traitée à la section 5.2.

(iii) Si l'âge initial x_0 *de décompte des dépendants est de l'ordre de 55 ans, alors le nombre de dépendants d'âge inférieur à* x_0 *sera négligeable devant l'effectif total de la population dépendante.*

6.2 Les deux expressions de la prime pure unique

Comme on l'a déjà indiqué, l'assureur s'engage à verser une rente viagère à l'assuré en cas d'entrée en dépendance. Le montant de la rente est choisi par l'assuré à la signature du contrat. En contrepartie, l'assuré s'engage, tant qu'il est vivant et valide, à payer une prime annuelle dont le montant initial est fonction du niveau de la rente choisie et de l'âge à la souscription. Soit (x) une tête d'âge x, vivante et valide à l'époque de la signature du contrat, prise comme origine. On note

$X =$ indicateur de survie de (x)

$Y =$ indicateur de dépendance de (x)

On a les équivalences

$$X(k) = 1 \Leftrightarrow (x) \textit{ est vivant à l'époque } k$$

$$Y(k) = 1 \Leftrightarrow (x) \textit{ est dépendant à l'époque } k$$

Les variables aléatoires $X(k)$ et $Y(k)$ ne sont pas indépendantes : il est nécessaire d'être vivant pour être dépendant. La valeur actuelle des engagements de l'assureur est donnée par

$$W_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} X(k)Y(k)v^k \tag{5}$$

où

$$v = \frac{1}{1+i}$$

est le facteur d'actualisation correspondant au taux technique i et où ω est l'âge limite de la table de mortalité utilisée. Cette valeur actuelle est une variable aléatoire dont on peut calculer les moments. L'espérance mathématique ou valeur actuelle probable (vap) est la prime pure unique donnée par

$$\Pi_x = E(W_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x} E(X(k)Y(k))v^k$$

Nous avons

$$E(X(k)Y(k)) = P(X(k) = 1 \textit{ et } Y(k) = 1) = P(X(k) = 1)P(Y(k) = 1 / X(k) = 1)$$

soit finalement

$$E(X(k)Y(k)) = {}_k\, p_x\, j_{x+k}(x) \tag{6}$$

où $j_{x+k}(x)$ est le taux de prévalence à l'âge $x+k$, relativement à une population d'individus vivants et valides à l'âge x. Il en résulte que

$$\Pi_x = \sum_{k \geq 0} {}_k\, p_x\, j_{x+k}(x) v^k \tag{7}$$

Remarque 6.3 *L'expression de la prime pure unique* Π_x *donnée par (7) utilise les taux de prévalence* $j_{x+k}(x)$ *ce qui correspond bien au risque pris en charge par l'assureur. Il est clair en effet que si une personne âgée de 70 ans souhaite souscrire un contrat dépendance, le taux de prévalence qui intéresse l'assureur pour le calcul de la prime est celui relatif à la population des plus de 70 ans. Le nombre de dépendants qui sont entrés en dépendance avant 70 ans ne devra pas intervenir dans ce cas.*

Cela soulève une difficulté, car les taux $j_{x+k}(x)$*, pour* $k \geq 0$ *ne sont généralement pas connus et l'assureur sera conduit à utiliser les taux* $j_{x+k}(x_0)$ *relatifs à une population d'âge au moins égal à* $x_0 < x$*. D'après la remarque 6.2 (ii), nous savons que* $j_{x+k}(x_0) > j_{x+k}(x)$ *quel que soit l'entier* $k \geq 0$*, ce qui entraîne que la prime pure calculée à partir des taux de prévalence* $j_{x+k}(x_0)$ *sera plus grande que* Π_x*. Comme indiqué dans [16] et [18], le biais ainsi introduit ne sera pas trop important si l'âge* x *reste inférieur à 75 ans, car le nombre d'entrées en dépendance avant 75 ans est faible. Par contre, si* x *était supérieur à 75 ans, la prime pourrait être modifiée. Nous reviendrons sur ce point à la section 7.5.*

Une autre expression de la prime pure unique peut être donnée. Dans [16] et [18] (où la formule (7) avait déjà été donnée), il est établi que la prime pure unique peut aussi s'exprimer en fonction de l'incidence, de la loi de mortalité des valides et de celle des dépendants. Plus précisément, les auteurs établissent la formule

$$\Pi_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} {}_k\, p_x^a\, i_{x+k}\, a_{x+k}^i\, v^k \tag{8}$$

qui peut s'interpréter de la manière suivante : si un actif, d'âge (x) à la signature du contrat, est vivant et actif à l'époque k (avec probabilité ${}_k\, p_x^a$) et devient dépendant (avec probabilité i_{x+k}), alors l'assureur lui versera une annuité vie entière dont la vap à l'époque k est a_{x+k}^i.

Quant à la prime pure annuelle, notée P_x, on suppose qu'elle est constante et payable tant que (x) est vivant et non dépendant (ou actif). Elle s'écrit

$$P_x = \frac{\Pi_x}{\ddot{a}_x^a}$$

où $\ddot{a}_x^a$ est la valeur actuelle probable d'une annuité, de montant unité, payable d'avance tant que (x) est vivant et valide. Elle est donnée par la formule

$$\ddot{a}_x^a = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x^a \; v^k$$

Dans cette expression et les précédentes, ${}_k p_x^a$ représente la probabilité pour que (x) soit vivant et non dépendant à l'âge $x+k$ sachant qu'il était dans cet état à l'âge x.

Dans les calculs numériques, nous avons utilisé la formule (7) pour le calcul de Π_x . Un fractionnement a également été introduit en supposant que l'annuité (rente d'invalidité) est payée à la fin de chaque mois. Pour l'annuité non fractionnée, nous avons

$$a_{x+k}^i = \sum_{m=0}^{\omega-x} {}_m p_{x+k}^i \; v^{m+1}$$

L'annuité mensuelle s'en déduit en ajoutant 11/24.

6.3 Variance associée à un contrat dépendance

Pour un contrat donné, la vap des dépenses de l'assureur, soit $E(W_x)$, a été calculée précédemment. Elle représente l'espérance mathématique actualisée des paiement qui seront effectués par l'assureur pour ce contrat. On peut aussi calculer la variance $V(W_x)$ de cet échéancier. En revenant à (5) et en utilisant la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient

$$V(W_x) = \sum_{k\geq 0} V(X(k)Y(k))v^{2k} + \sum_{m\geq 1}\sum_{k=0}^{m-1} cov(X(k)Y(k),\, X(m)Y(m))v^{k+m} \qquad (9)$$

(les sommations sont évidemment limitées à $\omega - x$).

La relation (6) entraîne que, pour tout entier $k \geq 0$ la variable aléatoire $X(k)Y(k)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$P(X(k)=1 \; et \; Y(k)=1) = {}_k \; p_x \, j_{x+k}$$

ce qui implique

$$V(X(k)Y(k)) = {}_k \; p_x \, j_{x+k}(1 - {}_k \; p_x \, j_{x+k}) \qquad (10)$$

Quant au calcul des covariances nous avons, quels que soient les entiers k et m vérifiant $k < m$,

$$E(X(k)Y(k) \; X(m)Y(m)) = P(X(k)Y(k) = 1 \; et \; X(m)Y(m) = 1)$$

$$= P(X(m)Y(m) = 1 / X(k)Y(k) = 1)P(X(k)Y(k) = 1)$$

Or, si $X(k)Y(k) = 1$ c'est que (x) est vivant et invalide à l'époque k. Par conséquent, il sera encore invalide à l'époque m s'il est vivant, ce qui se produira avec probabilité ${}_{m-k}\,p^i_{x+k}$. On en déduit

$$E(X(k)Y(k)\ X(m)Y(m)) = {}_{m-k}\,p^i_{x+k}\ {}_k p_x\, j_{x+k}$$

et

$$cov(X(k)Y(k), X(m)Y(m)) = {}_k\ p_x\, j_{x+k}\,({}_{m-k}\,p^i_{x+k} - {}_m p_x\, j_{x+m})$$

On obtient l'expression de $V(W_x)$ en revenant à (9), soit

$$V(W_x) = \sum_{k \geq 0} {}_k\, p_x\, j_{x+k}\,(1 - {}_k\, p_x\, j_{x+k})v^{2k} + \sum_{m \geq 1}\sum_{k=0}^{m-1} {}_k\, p_x\, j_{x+k}\,({}_{m-k}\,p^i_{x+k} - {}_m p_x\, j_{x+m})v^{k+m} \qquad (11)$$

Pour un assuré de 55 ans souscrivant un contrat dépendance au début de l'année 2000 pour une rente dépendance de montant unité, on obtient $E(W_x) = 0,367$, $V(W_x) = 1,969$ et $\sigma(W_x) = 1,403$. Cela conduit à un coefficient de variation de 3,82 pour un contrat. Pour un groupe de 10 000 contrats supposés indépendants, ce coefficient n'est plus que de 0,0382.

7. DESCRIPTION DES SCÉNARIOS ENVISAGÉS

Après avoir défini les scénarios qui seront utilisés, on examine l'évolution de la prévalence et de l'effectif de la population des personnes dépendantes en France à l'horizon 2040.

7.1 Évolutions relatives de la mortalité et de la morbidité

Comme on l'a vu, il est essentiel de d'étudier et si possible de prévoir l'évolution de l'incidence et de la prévalence de la population des dépendants au cours du temps. D'après l'enquête HID, plusieurs scénarios relatifs à leur évolution à l'horizon 2040 peuvent être envisagés. On a considéré un scénario statique et trois scénarios dynamiques.

Le *scénario statique*, ou plus précisément de *morbidité statique*, correspond à l'hypothèse où les taux de prévalence restent constants avec le temps pour chaque âge. Ainsi, avec l'allongement de l'espérance de vie, le nombre de dépendants va augmenter et le temps moyen passé en dépendance va s'accroître.

Les *scénarios dynamiques*, ou de *morbidité dynamique*, sont au nombre de trois : le scénario pessimiste, le scénario optimiste et le scénario central.

Le *scénario pessimiste* correspond à l'hypothèse selon laquelle les gains d'espérance de vie en validité (c'est-à-dire sans dépendance) évoluent de manière parallèle aux gains d'espérance de vie de la population générale. Dans ce scénario, la prévalence baisse donc à un rythme identique aux gains d'espérance de vie de la population générale. Ces gains d'espérance de vie en validité impliquent que le nombre de dépendants et donc le temps moyen passé en dépendance reste stable.

Le *scénario optimiste* correspond à l'hypothèse selon laquelle les gains d'espérance de vie en validité vont continuer à évoluer à un rythme identique à celui observé dans les années 1990, c'est-à-dire à un rythme supérieur à celui des gains d'espérance de vie de la population générale.

Le *scénario central* constitue une moyenne des deux scénarios précédents. Dans ce scénario les gains d'espérance de vie en validité vont évoluer à un rythme moins rapide que dans le scénario optimiste, tout en restant plus rapide que les gains d'espérance de vie de la population générale.

7.2 Évolution de la prévalence pour un âge donné selon les scénarios.

Des études de la DREES (voir par exemple [3]) ont mis en évidence une tendance à l'accroissement de l'espérance de vie en validité pour un même âge, ce qui va retarder l'âge moyen d'entrée en dépendance. Si l'on admet que ce phénomène va persister, on peut considérer que la valeur de la prévalence, observée aujourd'hui pour un individu donné, est égale à celle observée dix ans plus tôt pour un individu plus jeune d'un certain nombre d'années. Ce phénomène est appelé ``décalage de la prévalence''. Le tableau suivant indique les décalages de la prévalence à partir de 60 ans selon le sexe et le scénario considéré.

	Scénario pessimiste		Scénario central		Scénario optimiste	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
De 60 à 79 ans	1,3 an	1,4 an	1,3 an	1,4 an	1,3 an	1,4 an
80 ans et plus	0,6 an	0,7 an	1,1 an	1,3 an	1,7 an	2,0 ans

Tableau 5 - Décalages d'âges selon les scénarios, par âge par sexe[1]

Le tableau se lit de la façon suivante : pour le scénario pessimiste par exemple, le

[1] Source : DREES, n° 160, Personnes âgées dépendantes et aidants potentiels : une projection à l'horizon 2040.

taux de prévalence pour les hommes de 60 à 79 ans à un âge x donné, est identique à celui qu'il était à l'âge $x-1,3$ ans, dix ans plus tôt. En partant du tableau précédent et des taux de prévalence pour l'année 2000, on peut donc obtenir les taux de prévalence futurs pour chacun des scénarios dynamiques, et pour chaque âge.

Hypothèses et approximations

Les données dont nous disposons nous ont conduit à introduire quelques hypothèses et approximations.

(i) Les valeurs des décalages sont issus d'études statistiques sur la dépendance lourde, celle regroupant les niveaux GIR 1, 2, 3 et 4. On est amené à supposer que ceux-ci s'appliquent de manière identique à la dépendance totale, c'est-à-dire au regroupement des niveaux GIR 1 et 2 seuls.

(ii) De plus, le modèle actuariel que l'on va utiliser établit des tarifs dont l'âge de souscription débute à 50 ans, ce qui conduit à supposer aussi que les décalages d'âges entre 60 et 79 ans s'appliquent à l'identique entre 50 et 60 ans.

(iii) Les données ci-dessus concernant la dépendance lourde distinguent les hommes et les femmes. Toutefois, les autres données dont nous disposions ne distinguaient pas les deux populations. De plus, les tarifs appliqués sont identiques pour les deux sexes. Par conséquent, pour appliquer les décalages d'âges ci-dessus, on calculera au préalable la moyenne des décalages des deux sexes à l'intérieur de chacune des deux tranches d'âges et pour chacun des trois scénarios. Afin de simplifier, nous avons supposé que les hommes et les femmes étaient en nombres égaux.

	Scénario pessimiste	Scénario central	Scénario optimiste
De 50 à 79 ans	1,35 an	1,35 an	1,35 an
80 ans et plus	0,65 an	1,20 an	1,85 an

Tableau 6 - Décalages d'âges pour l'évolution du taux de prévalence (hommes et femmes confondus)

Ce tableau permet d'obenir les taux de prévalence pour l'année k (k pouvant prendre les valeurs 2010, 2020, 2030 ou 2040), au moyen de la formule générique

$$j_x = B\exp\{a(x-d_x(k))\}$$

dans laquelle x représente l'âge et $d_x(k)$ le décalage d'âge relatif à l'année k et à l'âge x. Dans le cas du scénario statique on a toujours $d_x(k)=0$. Pour le scénario central, on a pris $d_x(2010)=1,35$ lorsque x est compris entre 50 et 79 ans, et $d_x(2010)=1,2$ lorsque x est au moins égal à 80 ans. Ces formules permettent donc une évaluation prospective de la prévalence, dans différents scénarios. En particulier, elles nous ont permis de déterminer la prévalence en fonction de l'âge en 2040, ce qui est illustré par le graphique suivant.

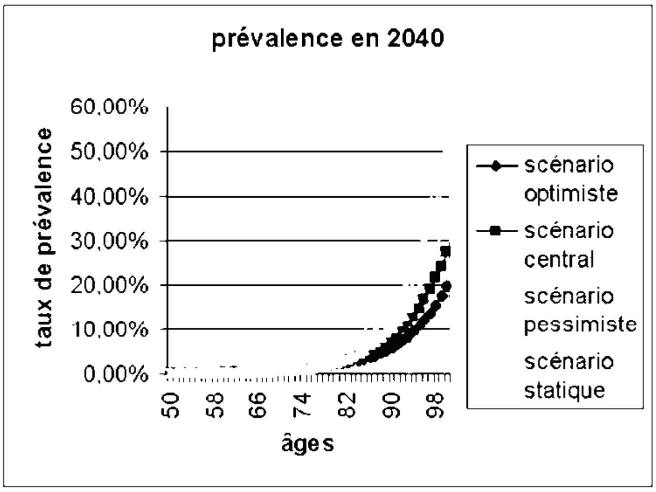

Figure 2

Afin d'éviter que les courbes correspondantes ne présentent des discontinuités à l'âge de 80 ans, nous avons effectué un raccordement linéaire des décalages d'âge entre les âges de 77 et 83 ans. Pour chaque âge on observe que les courbes de la prévalence relatives aux scénarios dynamiques s'écartent de celle du scénario statique. Avant l'âge de 80 ans les courbes des scénarios dynamiques sont pratiquement identiques puis divergent conformément au tableau des décalages d'âges.

7.3 Évolution de la proportion globale de dépendants selon le scénario

On a calculé la part de la population dépendante dans la population française à l'horizon 2040. L'évolution de l'effectif de la population des assurés est évaluée en effectuant la somme des l_x (à partir de $x = 50$ ans). Pour la population des dépendants, on effectue la somme des l_x^i . Le tableau ci-dessous illustre ces évolutions. On observe que dans le scénario statique la proportion de la population dépendante s'accroît dans le portefeuille. Cette proportion reste globalement constante dans le scénario pessimiste. Par contre, elle diminue dans le cadre du scénario optimiste et du scénario central.

Année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario statique	2,59	2,92	3,25	3,56	3,86
Scénario pessimiste	2,59	2,63	2,65	2,63	2,60
Scénario central	2,59	2,51	2,39	2,26	2,10
Scénario optimiste	2,59	2,37	2,13	1,90	1,68

Tableau 7 - Proportion des dépendants dans le portefeuille (en pourcentage), selon les différents scénarios

Le scénario statique dans lequel la part de la population dépendante va augmenter de près 50% risque de poser à l'assureur un problème de provisionnement. Dans le scénario central et le scénario optimiste, les gains d'espérance de vie sans dépendance évoluent à un rythme plus rapide que les gains d'espérance de vie de la population générale. Le temps moyen passé en dépendance va donc diminuer. Dans ce cas, on est en présence d'un phénomène de compression de la morbidité, puisque les taux de prévalence croissent moins rapidement avec l'âge.

Le scénario statique est considéré comme assez peu probable. En effet une enquête sur la dépendance menée dans les années 1980 avait montré que les gains d'espérance de vie sans dépendance avaient évolué à un rythme identique, voire un peu supérieur, aux gains d'espérance de vie de la population générale. Ce scénario correspond à une décompression de la morbidité.

Dans chacun des scénarios, mis à part le scénario statique, il y a baisse de la prévalence au cours du temps pour chaque âge fixé. Dans le cadre du scénario central, on observe que la prévalence diminue à horizon 2020 et 2040.

Par exemple, à l'âge de 80 ans la prévalence est de 4,21% en 2000, elle est de 3,07% en 2020 pour le même âge, et de 2,20% en 2040, ce qui représente une baisse proche de 50%. La pente de cette baisse s'estompe un peu avec l'âge, elle passe de 50% à l'âge de 60 ans à 45% l'âge de 85 ans.

7.4 Combinaison des scénarios

L'évolution du risque de sous-provisionnement va être examinée dans le cadre de huit scénarios déterminés par le croisement des quatre scénarios d'évolution de la prévalence, vus plus haut, et de deux scénarios d'évolution des taux d'intérêt techniques, tous s'appuyant sur le scénario central de mortalité de l'INED. C'est le scénario utilisé usuellement par l'INSEE pour établir les projections démographiques.

Les tarifs et les provisions techniques de l'assureur sont des fonctions de la mortalité, de la prévalence (ou de l'incidence), et du taux d'intérêt technique, fixé à la signature du contrat. L'évolution de la mortalité générale a été abondamment étudiée et différents scénarios prospectifs ont été envisagés. Nous retiendrons le scénario central de l'INED. Par contre, l'évolution de la dépendance est encore mal cernée. C'est pourquoi nous envisagerons quatre scénarios possibles pour cette dernière, à savoir les quatre scénarios décrits précédemment. En ce qui concerne le taux d'intérêt technique, il est borné supérieurement par une fonction marché obligataire. La réglementation actuelle prévoit que ce taux, noté t doit satisfaire les inégalités

$$0 \leq t \leq \min(0,03\,;\,0,75\,TME) \tag{12}$$

où TME désigne le taux moyen des émissions obligataires.

En résumé, on retiendra un seul scénario pour la mortalité générale, quatre pour la prévalence et deux pour les taux d'intérêt. Cela conduit donc à huit scénarios au total pour l'évolution des tarifs et des provisions techniques de l'assureur.

7.5 Influence de l'évolution de la mortalité des dépendants sur la tarification

Revenons brièvement sur la représentation que nous avons adoptée pour la mortalité des dépendants et son évolution (voir section 5.2). Nous avons supposé que les taux de mortalité des dépendants restent constants pour un âge fixé par rapport à ceux de 2000. Ces taux ont été calculés pour toutes les années futures, de 2010 à 2040, par la formule de la SCOR en se référant à la table TD 88-90. Cette façon de procéder soulève une question. En effet, si au lieu de se référer à la table TD 88-90, on appliquait la formule de la SCOR aux tables prospectives de mortalité générale, les taux de mortalité des dépendants diminueraient, puisque les taux de la mortalité générale vont décroître pour chaque âge. En utilisant cette dernière méthode, on obtiendrait des taux dits *prospectifs.* Il est alors possible de calculer les tarifs, d'une part pour les taux initiaux et, d'autre part pour les taux prospectifs que l'on vient de définir.

On peut vérifier que ces deux tarifs sont très proches, comme le montre le graphique suivant. Dans le cadre du scénario central, ce graphique présente les tarifs calculés en 2020 en fonction de l'âge. La prestation dépendance consiste en une rente mensuelle de 1000 unités monétaires.

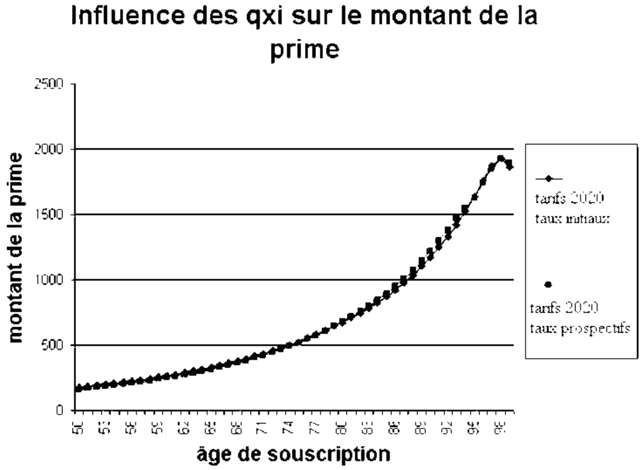

Figure 3

En partant des taux prospectifs pour la mortalité des dépendants, les tarifs varient très peu, ce qui montre que les deux méthodes sont pratiquement équivalentes. Un léger biais peut être observé à partir de 83 ans. La prime de l'année 2020, calculée selon les taux de mortalité prospectifs, est légèrement supérieure à la prime calculée selon les taux initiaux.

Compte tenu de la formule (7), qui permet de calculer la prime pure unique, et de la remarque 6.3, les constatations précédentes ne sont pas étonnantes. Comme précédemment, désignons par x_0 l'âge initial de décompte des dépendants pour le calcul des taux de prévalence. Tant que l'âge de souscription, noté x, est tel que le nombre de dépendants entre x_0 et x est négligeable, la relation (7) permet de calculer la prime pure unique avec une très bonne précision. Étant donné que cette relation ne contient pas les taux de mortalité des dépendants, il est évident que la prime sera peu sensible à la variation de ces taux. Cela reste valable dans le domaine d'applicabilité de cette relation, pratiquement pour des âges ne dépassant pas 75 ans. Dans cette tranche d'âge, une diminution (resp. une augmentation) des taux q_x^i entraînera une diminution (resp. une augmentation) des taux d'incidence, mais ne modifiera que très peu la prime pure unique.

8. IMPACT DE L'ÉVOLUTION DES CONDITIONS DÉMOGRAPHIQUES ET FINANCIÈRES

Il est commode d'introduire le terme *d'environnement démographique* pour désigner, à une époque donnée, les tables de mortalité et l'ensemble des taux de prévalence (ou d'incidence) relatifs à la dépendance. *L'environnement financier* sera quant à lui constitué de deux valeurs, à savoir le taux d'intérêt technique appliqué par l'assureur et le taux d'intérêt des marchés obligataires (ou taux moyen des obligations détenues par l'assureur). L'évolution au cours du temps de ces deux environnements va influer sur les montants des primes et des provisions techniques. Dans ce contexte, le rôle des bénéfices financiers devra également être envisagé, de même que celui des abandons de contrat par les assurés, phénomène non négligeable en assurance dépendance. Notre étude prospective sera effectuée selon le schéma décrit dans la sous-section 7.4. Elle peut aussi être vue comme une étude de sensibilité de la prime et des provisions techniques aux variations des paramètres dont elles dépendent.

8.1 Évolution des tarifs

On présente d'abord l'évolution des tarifs ``âge à l'adhésion" (ou à la souscription) pour des assurés de 55, 65 et 75 ans, entre 2000 et 2040. Le taux technique initial t appliqué par l'assureur est supposé égal à 2,5%. Dans les trois tableaux suivants, ce taux est supposé constant sur l'ensemble de la période. Rappelons que la prestation dépendance considérée ici consiste en une rente mensuelle de 1000 unités monétaires et que la prime est payée annuellement.

année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario Statique	228	253	276	299	319
Scénario Pessimiste	228	226	221	214	205
Scénario Central	228	216	202	186	170
Scénario Optimiste	228	205	182	160	140

*Tableau des tarifs âges à l'adhésion sous hypothèse de **taux constants** pour un assuré de 55 ans*

année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario Statique	364	398	431	462	491
Scénario Pessimiste	364	356	347	335	319
Scénario Central	364	340	313	287	260
Scénario Optimiste	364	320	280	242	210

Tableau des tarifs âges à l'adhésion sous hypothèse de **taux constants** *pour un assuré de 65 ans*

année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario Statique	612	664	710	754	794
Scénario Pessimiste	612	605	587	564	538
Scénario Central	612	565	516	467	419
Scénario Optimiste	612	522	444	377	319

Tableau des tarifs âges à l'adhésion sous hypothèse de **taux constants** *pour un assuré de 75 ans*

Dans les trois tableaux suivants, le taux technique est supposé en baisse de 0,25% tous les dix ans, soit 1% pour la période 2000 à 2040. L'assureur peut être contraint à une telle baisse à cause de la baisse du taux des émissions obligataires et en vertu des inégalités (12) qui reflêtent la réglementation.

année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario Statique	228	262	296	332	368
Scénario Pessimiste	228	234	236	239	239
Scénario Central	228	223	216	206	196
Scénario Optimiste	228	212	194	176	160

Tableau des tarifs âges à l'adhésion sous hypothèse de **baisse des taux** *pour un assuré de 55 ans*

année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario Statique	364	407	451	496	539
Scénario Pessimiste	364	365	364	360	353
Scénario Central	364	347	328	307	286
Scénario Optimiste	364	328	292	259	228

Tableau des tarifs âges à l'adhésion sous hypothèse de **baisse des taux** *pour un assuré de 65 ans*

année	2000	2010	2020	2030	2040
Scénario Statique	612	672	730	784	838
Scénario Pessimiste	612	612	602	588	568
Scénario Central	612	572	529	485	440
Scénario Optimiste	612	529	455	391	335

Tableau des tarifs âges à l'adhésion sous hypothèse de **baisse des taux** *pour un assuré de 75 ans*

Lorsque le taux d'intérêt technique reste constant, seul le scénario statique conduit à une augmentation de la prime pure annuelle. Par contre, lorsque ce taux est à la baisse, on constate une augmentation tarifaire non seulement pour le scénario statique, mais aussi pour le scénario dynamique pessimiste.

Pilotage du portefeuille

Les cas où les tarifs âge à adhésion diminuent ne posent pas de problème à l'assureur, mais il n'en sera pas de même si ces tarifs augmentent. Face à une telle situation, l'assureur aura le choix entre trois actions possibles, ce qui correspond au ``pilotage'' du portefeuille dépendance.

(i) maintenir les tarifs en espérant que la compensation statistique temporelle s'appliquera sur la période considérée pour le portefeuille ou/et que les bénéfices financiers permettront de rétablir l'équilibre.

(ii) augmenter les tarifs des nouveaux entrants, mais ne pas modifier les tarifs des assurés déjà en portefeuille.

(iii) augmenter, non seulement les tarifs des nouveaux entrants, mais aussi les tarifs des assurés du portefeuille, en prenant en compte la provision technique accumulée par chacun d'eux.

Afin d'illustrer et de développer cet aspect, considérons le cas d'une personne âgée de 55 ans en 2000 ayant souscrit à cette époque un contrat d'assurance dépendance dont la garantie consiste dans le versement d'une rente viagère annuelle constante de montant r, payable à terme échu à partir de l'époque où cette personne deviendra dépendante, si elle le devient un jour.

La prime pure unique sera notée Π_{55}^{2000} ou $\Pi_{55}(2000)$ et la prime annuelle constante correspondante, notée P_{55}^{2000} ou $P_{55}(2000)$, est donnée par

$$P_{55}^{2000} = \frac{\Pi_{55}^{2000}}{\ddot{a}_{55}^{a}(2000)}$$

Dans l'égalité précédente $\ddot{a}_{55}^{a}(2000)$ désigne la vap d'une annuité annuelle constante, payable tant que l'assuré est vivant et valide (actif). Le nombre ``2000'' entre parenthèses renvoit aux paramètres de l'environnement démographique et financier de l'année 2000. Dix années plus tard, en 2010, on peut considérer la provision technique pure de ce contrat, qui est donnée par

$${}_{10}V_{55}^{2000} = \Pi_{65}^{2000} - \ddot{a}_{65}^{a}(2000)P_{55}^{2000} \tag{13}$$

Cette écriture exprime que les calculs sont effectués relativement à la table de mortalité, au taux d'incidence et au taux d'intérêt technique de l'année 2000.

Dérive des provisions techniques

Si maintenant on applique les paramètres de l'environnement de 2010, mais en maintenant la prime annuelle de 2000, alors la provision technique, notée ${}_{10}\tilde{V}_{55}^{2010}$, aura pour expression

$${}_{10}\tilde{V}_{55}^{2010} = \Pi_{65}^{2010} - \ddot{a}_{65}^{a}(2010)P_{55}^{2000} \tag{14}$$

Dans (14), l'expression Π_{65}^{2010} représente la prime pure unique d'un contrat d'assurance dépendance pour un assuré d'âge 65 ans qui souscrit au 1/1/2010, cette prime étant calculée à partir des conditions de 2010. L'assureur s'intéresse à la différence, notée Δ_{2010}, entre les deux valeurs des provisions données par (13) et (14), soit

$$\Delta_{2010} = {}_{10}\tilde{V}_{55}^{2010} - {}_{10}V_{55}^{2000} \tag{15}$$

Cette différence Δ_{2010} traduit une *dérive des provisions techniques* en 2010. Si Δ_{2010} est positif, alors l'assureur se trouvera en situation de sous-provisionnement.

Autrement dit, le montant des provisions calculées selon l'état de l'environnement de 2000 sera moins élevé que celui calculé par référence au nouvel état constaté en 2010 et ne suffira donc plus à couvrir le risque. Les expressions de Δ_j pour $j = 2020$, 2030 et 2040 s'obtiennent de manière similaire, soit

$$\Delta_j = {}_{j-2000}\tilde{V}_{55}^{j} - {}_{j-2000}V_{55}^{2000} \qquad avec \qquad {}_{j-2000}\tilde{V}_{55}^{j} = \Pi_{55+j-2000}^{j} - \ddot{a}_{55+j-2000}^{a}(j)P_{55}^{2000} \tag{16}$$

La prime modifiée

Si, en 2010, l'assureur souhaite modifier la prime pure annuelle de l'assuré, il ne peut simplement remplacer P_{55}^{2000} par P_{65}^{2010} qui représente la prime d'un nouvel entrant n'ayant jamais cotisé. Afin de prendre en compte la provision de l'assuré qui a souscrit en 2000, l'assureur devra résoudre l'équation

$${}_{10}V_{55}^{2000} + z\ddot{a}_{65}^{a}(2010) = \Pi_{65}^{2010}$$

où z est la valeur de la nouvelle prime, dite *prime modifiée,* qui prend en compte, non seulement les paramètres de l'environnement de 2010, mais aussi la provision technique accumulée par l'assuré entre 2000 et 2010. En revenant aux relations (14) et (15) on arrive à

$$z - P_{55}^{2000} = \frac{\Delta_{2010}}{\ddot{a}_{65}^{a}(2010)} \tag{17}$$

La différence $z - P_{55}^{2000}$, qui représente le supplément algébrique de prime pure annuelle, est évidemment du signe de Δ_{2010}.

Remarque 8.1 *Afin d'alléger l'écriture, on peut omettre l'indication de l'année 2000, année de souscription du contrat. Par exemple, nous noterons plus simplement*

$$\Pi_{55} = \Pi_{55}^{2000} \qquad P_{55} = P_{55}^{2000} \qquad \ddot{a}_{55}^{a} = \ddot{a}_{55}^{a}(2000)$$

et pour les provisions techniques ${}_kV_{55} = {}_kV_{55}^{2000}$ quel que soit $k \geq 1$.

8.2 Évolution des provisions techniques et de la prime modifiée

On désigne par t_k le taux d'intérêt technique appliqué durant la k ème année (entre les époques $k-1$ et k). Comme on l'a déjà indiqué, ce taux doit satisfaire certaines conditions en accord avec la réglementation. Le taux de rendement des produits financiers, par exemple le taux des marchés obligataires, sera quant à lui noté τ_k pour la même période.

Afin de déterminer les expressions des provisions techniques d'un contrat dépendance, nous utilisons la méthode par récurrence. À l'époque 0, juste après la signature du contrat et paiement de la première prime annuelle, la provision technique passe de ${}_0V_{55} = 0$ à ${}_{0+\varepsilon}V_{55} = P_{55}^{2000}$. À la fin de la première année, si l'assuré est vivant et valide, la provision technique ${}_1V_{55}$ sera donnée par

$$ {}_1V_{55} = \frac{{}_{0+\varepsilon}V_{55} - r\, i_{55}\, a_{55}^i}{{}_1E_{55}^a} \tag{18}$$

où l'on a posé

$$ {}_1E_{55}^a = {}_1\, p_{55}^a \, \frac{1}{1+t_1}$$

ce qui représente la vap en 2000 d'un capital différé de montant unité payable dans un an sous la condition que ce dernier soit vivant et valide. Le taux d'actualisation est t_1 . Dans l'éventualité où, au bout d'une année, l'assuré est, soit décédé, soit vivant et invalide, la provision technique se réduit à zéro.

À la fin de la k ème année nous avons de manière similaire, sous réserve que l'assuré soit vivant et valide

$$ {}_kV_{55} = \frac{{}_{k-1}V_{55} + P_{55} - r\, i_{55+k-1}\, a_{55+k-1}^i}{{}_1E_{55+k-1}^a} \qquad k \geq 1 \tag{19}$$

où

$$ {}_1E_{55+k-1}^a = {}_1\, p_{55+k-1}^a \, \frac{1}{1+t_k}$$

t_k désignant le taux d'intérêt technique de la k ème année. Quant au terme $r\, i_{55+k-1}\, a_{55+k}^i$, il correspond à la garantie accordée par l'assureur à l'assuré si ce dernier devenait dépendant au cours de l'année k . On note à nouveau que la formule n'est valable que si l'assuré est vivant et valide à la fin de la k ème année. Sinon, la provision technique est nulle.

Remarque 8.2 - Provision technique et espérance conditionnelle

La provision technique peut être considérée individuellement pour un contrat déterminé ou globalement pour un ensemble de contrats. Afin de préciser ce point, désignons par A_k l'événement défini par

$$A_k = \{l'assur\acute{e}\ est\ vivant\ et\ valide\ \grave{a}\ l'\acute{e}poque\ k\}.$$

Du point de vue probabiliste, la provision technique relative à un contrat donné pour l'année k est une variable aléatoire que l'on peut noter ${}_kL_{55}$. Elle prendra la valeur ${}_kV_{55}$ indiquée ci-dessus si l'événement A_k est réalisé et sera égale à 0 dans le cas contraire, autrement dit si l'assuré est décédé ou dépendant à l'époque k . Par conséquent, ${}_kV_{55}$ est l'espérance conditionnelle de ${}_kL_{55}$ sachant que A_k est réalisé, soit

$$ {}_kV_{55} = E({}_kL_{55} / A_k). $$

Il en résulte que l'espérance mathématique de ${}_kL_{55}$ peut s'écrire

$$ E({}_kL_{55}) = P(A_k)\ {}_kV_{55} + (1 - P(A_k)) \times 0 = P(A_k)\ {}_kV_{55} = {}_k\,p^a_{55}\ {}_kV_{55} \qquad (20) $$

Cette dernière expression sera utile si l'on doit considérer un ensemble de contrats, de taille suffisamment grande. En effet, d'après la loi des grands nombres, $E({}_kL_{55})$ sera proche de la moyenne arithmétique des provisions techniques des contrats de cet ensemble. Pour plus de précisions et des exemples, on pourra consulter [7], [8], [17] ou [18].

Nous présentons quelques exemples numériques montrant l'évolution de la dérive des provisions techniques, définie par (16), et de la prime modifiée définie par (17). À la première ligne de chaque tableau figure l'année (de 2000 à 2040), sur la deuxième ligne est indiqué l'âge de l'assuré. La troisième ligne présente les valeurs de Δ_j pour $j = 2000, 2010, \ldots, 2040$. Ces valeurs sont calculées par l'égalité (16). Par définition, la première valeur de Δ_j, soit Δ_{2000}, est nulle. À la quatrième ligne figure la prime modifiée, notée z_j. Elle est égale à P_{55} pour l'année 2000. À la dernière ligne on trouve le facteur d'accroissement z_j / P_{55} de la prime relativement à la prime initiale P_{55}.

Le tableau suivant présente les résultats dans le cas du scénario statique en supposant que les taux restent constants sur l'ensemble de la période 2000 à 2040. Vient ensuite le tableau dans lequel les taux sont à la baisse. La prestation dépendance est encore une rente mensuelle de 1000 unités monétaires.

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	649	1 622	2 189	1 156
prime modifiée z_j	228	270	371	556	616
facteur d'accroissement	100%	118%	163%	244%	270%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario statique et taux constants

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	856	2 033	2 581	1 321
prime modifiée z_j	228	282	401	603	664
facteur d'accroissement	100%	124%	176%	264%	291%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario statique et baisse des taux

Les deux tableaux suivants concernent le scénario pessimiste. Lorsque Δ_j est négatif, ce qui se produit en cas de sur-provisionnement, la prime modifiée z_j est inférieure à P_{55}^{2000}. Il peut même arriver que la prime modifiée prenne une valeur négative. Dans ce cas, nous n'avons pas indiqué cette valeur, mais avons attribué la valeur 0 (colonne de droite).

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	18	254	163	-1 421
prime modifiée z_j	228	229	250	252	0
facteur d'accroissement	100%	100,51%	109,76%	110,52%	0%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario pessimiste et taux constants

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	198	586	452	-1 386
prime modifiée z_j	228	240	277	292	0
facteur d'accroissement	100%	105,44%	121,69%	128,27%	0%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario pessimiste et baisse des taux

Dans le cas du scénario central les résultats sont les suivants.

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	-248	-539	-961	-2 921
prime modifiée z_j	228	212	181	89	0
facteur d'accroissement	100%	93,01%	79,47%	38,86%	0%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario central et taux constants

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	-8	-116	-810	-2 747
prime modifiée z_j	228	240	277	292	0
facteur d'accroissement	100%	99,77%	95,35%	42,23%	0%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario central et baisse des taux

Nous donnons enfin les résultats pour le scénario optimiste.

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040

âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	-548	-1 348	-2 432	-4 057
prime modifiée z_j	228	193	112	0	0
facteur d'accroissement	100%	84,61%	49,01%	0%	0%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario optimiste et taux constants

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Δ_j	0	-144	-724	-1 903	-3 788
prime modifiée z_j	228	219	168	0	0
facteur d'accroissement	100%	96,06%	73,57%	0%	0%

Tableau des tarifs modifiés sous hypothèse : scénario optimiste et baisse des taux

8.3 Influence des bénéfices financiers

Il est également utile d'examiner l'influence des bénéfices financiers qui contribuent à équilibrer les comptes de l'assureur et à compenser des pertes éventuelles. De manière générale, le bénéfice financier de la k ème année sera noté BF_k et le bénéfice cumulé des k premières années BFC_k. Comme précédemment on note t_k (resp. τ_k) le taux d'intérêt technique (resp. le taux de rendement des placements financiers) de la k ème année. On s'intéresse au bénéfice financier de l'assureur sur un ensemble de contrats dépendance. Ce bénéfice sera calculé en fin d'année en fonction des éléments ci-après.

(i) La prime de l'année k, notée Prime $_k$ est donnée par

$$Prime_k = {}_{k-1}p_{55}^a \; P_{55} \qquad k \geq 1$$

Le facteur ${}_{k-1}p_{55}^a$ correspond à la probabilité pour que cette prime soit effectivement payée.

(ii) Le montant des sinistres de l'année k s'écrit

$$Sinistre_k = {}_{k-1}p_{55}^a \; r \; i_{55+k-1} \; a_{55+k-1}^i \qquad k \geq 1$$

(iii) La provision technique probabilisée de l'année k, notée Prov $_k$ est donnée par

$$Prov_k = {}_kV_{55}\ {}_kp_{55}^a \qquad k \geq 1$$

où ${}_kV_{55}$ est donné par (19) et où ${}_kp_{55}^a$ est la probabilité pour que cette provision soit non nulle, ce qui équivaut au fait que l'assuré est vivant et valide à l'époque k. Cela est conforme à la formule (20).

(iv) L'actif rémunérable de l'époque k, noté AR_k, a pour expression

$$AR_k = Prime_k - Sinistre_k^{\cdot\cdot} + Prov_{k-1} \qquad k \geq 1$$

Au départ, avant la signature du contrat, on a évidemment $Prov_0 = 0$, ce qui entraîne

$$AR_1 = Prime_1 - Sinistre_1$$

Dans ces conditions, le bénéfice financier de la k ème année s'écrit

$$BF_k = AR_k\ (\tau_k - t_k) \qquad k \geq 1$$

On en déduit le bénéfice financier cumulé jusqu'à l'époque k

$$BFC_k = BFC_{k-1}\ \tau_k + BF_k$$

avec la condition initiale

$$BFC_1 = BF_1$$

Dans ce qui précède, on n'a pas indiqué quelles tables de mortalité (des actifs et des dépendants) étaient utilisées. En toute rigueur, pour évaluer BF_k, il conviendrait d'utiliser les tables en vigueur durant l'année k. Cependant, afin de ne pas trop compliquer les calculs, nous nous référerons systématiquement aux tables de mortalités de l'année 2000. Concernant les taux d'intérêt, on doit choisir la valeur du taux technique et du taux de rendement des placements financiers. Pour simplifier, ces deux taux ont été supposés constants sur l'ensemble de la période d'étude. Dans les deux applications numériques ci-après, la valeur du taux technique est supposée constante et égale à $t = 2,5\%$. En revanche, deux valeurs ont été considérées pour le taux de rendement des actifs financiers, soit $\tau = 3,33\%$ et $5,00\%$ (la première valeur est obtenue en divisant le taux technique t par 0,75). La troisième ligne du tableau présente les valeurs de

$$\Gamma_j = {}_{j-2000}\ p_{55}^a\ \Delta_j$$

pour $j = 2000, 2010, \ldots, 2040$ où Δ_j est défini par (16) et où ${}_{j-2000}p_{55}^a$ est la probabilité pour que les provisions techniques soient non nulles, autrement dit la probabilité pour que l'assuré soit encore vivant et valide l'année j. Noter en effet que l'on raisonne maintenant en espérance mathématique sur un ensemble de contrats et non plus sur un seul contrat.

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Γ_j	0	596	1 216	938	77
bénéfice financier cumulé - année j	0	93	364	761	1 171
% de Γ_j	0	16%	30%	81%	1 522%

Tableau des bénéfices financiers : scénario statique et taux constants
Taux technique : 2,50% - Taux de rendement des placements : 3,33%

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Γ_j	0	596	1 216	938	77
bénéfice financier cumulé - année j	0	294	1 238	2 847	5 017
% de Γ_j	0	49%	102%	303%	6 519%

Tableau des bénéfices financiers : scénario statique et taux constants
Taux technique : 2,50% - Taux de rendement des placements : 5,00%

Au vu des résultats, on note que même dans le cas défavorable du scénario statique le montant des bénéfices financiers tend à compenser les pertes techniques du contrat dépendance. Lorsque le taux de rendement des actifs financiers est égal à 3,33% cette compensation est totale en 2040. Lorsque ce taux vaut 5%, la compensation a lieu dès l'année 2020. Dans ce cas, l'assureur pourra par exemple prévoir de revaloriser la garantie initialement prévue au contrat.

8.4 Influence des abandons de contrat

Un autre élément doit être mentionné : celui de l'abandon du paiement des primes par certains assurés. On parle aussi de ``chutes''. Pour un contrat dépendance les abandons de contrats sont favorables à l'assureur puisque l'engagement qu'il a initialement provisionné se réduit à 0, sans compensation d'aucune sorte pour l'assuré[1]. Si l'on désigne par ρ le taux de chute annuel, il suffit dans les formules précédentes de remplacer les expressions du type ${}_k p_{55}^a$ par $(1-\rho)^k \; {}_k p_{55}^a$, ce qui donne pour tout $k \geq 1$

$$Prime_k = (1-\rho)^{k-1} \; {}_{k-1}p_{55}^a P_{55}$$

$$Sinistre_k = (1-\rho)^{k-1} \; {}_{k-1}p_{55}^a \, ri_{55+k-1} \, a_{55+k-1}^i$$

et

$$Prov_k = {}_k V_{55} (1-\rho)^{k-1} \; {}_k p_{55}^a$$

ce qui diminue le montant des provisions techniques à constituer et génère un bénéfice technique. Le bénéfice financier est encore donné par les relations

$$BF_k = AR_k \, (\tau_k - t_k) \qquad et \qquad BFC_k = BFC_{k-1} \, \tau_k + BF_k$$

On reprend les calculs des deux tableaux précédents en supposant que $\rho = 6\%$, valeur couramment observée.

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Γ_j	0	321	353	147	6
bénéfice cumulé - année j	0	552	1 580	2 685	3 854
pourcentage de Γ_j	0	172%	448%	1 831%	59 505%

Tableau des bénéfices financiers et techniques en présence d'abandons de contrat : scénario statique et taux constants Taux technique : 2,50% - Taux de rendement des placements : 3,33%

[1]À cet égard, le terme de ``rachat" serait donc impropre.

année (j)	2000	2010	2020	2030	2040
âge	55	65	75	85	95
Γ_j	0	321	353	147	6
bénéfice cumulé - année j	0	726	2 273	4 370	7 291
pourcentage de Γ_j	0	226%	644%	2 980%	112 583%

Tableau des bénéfices financiers et techniques en présence d'abandons de contrat : scénario statique et taux constants
Taux technique : 2,50% - Taux de rendement des placements : 5,00%

Ainsi, en présence d'abandons de contrats, au bénéfices de l'assureur sont plus élevés et compensent dans tous les scénarios le sous-provisionnement induit par des conditions démographiques défavorables.

9. CONCLUSION

A priori, le vieillissement de la population française, observé depuis quelques décennies, pouvait laisser craindre un risque excessif pour l'assurance dépendance, voire sa non assurabilité. Il est vrai que le scénario statique, même s'il est loin d'être le plus probable, est particulièrement défavorable à l'assureur et conduit à des situations de sous-provisionnement, spécialement en cas de chute importante des taux des marchés obligataires. Cette observation nous a conduit à un examen attentif basé sur des études statistiques et des formules actuarielles précises. Nous avons pu constater finalement que l'accumulation des bénéfices financiers d'une part, et le phénomène des abandons de contrat d'autre part, contribuent à compenser une aggravation éventuelle du risque dépendance au fil du temps.

Face à l'évolution des environnements démographiques et financiers, l'assureur dispose de plusieurs leviers de commande pour piloter un portefeuille de contrats dépendance. Il peut augmenter les tarifs pour les nouveaux assurés ou même pour les personnes déjà assurées, ce qu'autorise la réglementation actuelle. Cette dernière possibilité, en dépit de son efficacité, doit évidemment être envisagée avec prudence et comme un dernier recours, en raison de l'effet négatif sur l'image commerciale de la compagnie d'assurances qui déciderait de l'utiliser. À l'inverse, en période faste, l'assureur peut moduler la distribution des participations aux bénéfices, par exemple en revalorisant la garantie des contrats

L'étude que nous avons menée pourrait évidemment être reprise dans le cadre de modèles plus sophistiqués. On peut penser par exemples aux chaînes de Markov, déjà considérées dans [2]. Il serait bon d'examiner aussi les phénomènes d'anti-sélection qui peuvent se manifester pour des contrats individuels. Par ailleurs, la loi de mortalité des dépendants sur laquelle nous avons basés nos calculs est assez ancienne et une formule plus récente pourrait lui être substituée. Comme nous l'avons vu, cela ne modifierait guère les provisions techniques. Il est vrai que le montant des provisions pour sinistres (provisions de rente de dépendance) serait davantage affecté, mais le déficit éventuel serait compensé par les provisions pour risque croissant. Quant aux scénarios, spécialement ceux concernant les taux d'intérêt des marchés financiers, d'autres modèles bien connus s'avéreraient peut-être plus pertinents.

Il nous semble cependant que, pour perfectionner réellement ce travail, il serait nécessaire de pouvoir accéder à des bases de données plus riches que celles dont nous avons disposé. Ces données, assez restreintes, présentent néanmoins l'avantage d'appartenir au domaine public.

10. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] BAUER Agnès, (1995) : ``L'assurance dépendance", SCOR TECH, Juin 1995.

[2] BILLAUD Éric, FROMENTEAU Michel, PAUTET Christophe et ROBET Henry, (1987) : "Invalidité et Assurance du 4ème âge" (Mémoire d'Actuariat), Centre d'Études Actuarielles, Décembre 1987

[3] BONTOUT Olivier, COLIN Christel et KERJOSSE Roselyne, (2002) : ``Le nombre de personnes âgées dépendantes et aidants potentiels : une projection à l'horizon 2040", DREES, n° 160, Février 2002.

[4] COLIN Christel et COUTTON Vincent, (2000) : ``Le nombre de personnes âgées dépendantes d'après l'enquête Handicaps-Incapacité-Dépendance", DREES, n° 94, Décembre 2000.

[5] DUÉE Michel et REBILLARD Cyril, (2004) : ``La dépendance des personnes âgées : une projection à long terme", INSEE, Direction des Études et Synthèses Économiques, Document de travail G 2004 / 02

[6] FFSA : ``Modélisation du risque dépendance à partir des données HID", Cahiers

Techniques, No. 02 - Mars 2005

[7] GERBER U. Hans, (1997) : ``Life Insurance Mathematics", (3ème édition), Springer, 1997

[8] HESS Christian , (2000) : ``Méthodes Actuarielles de l'Assurance Vie", Economica, 2000

[9] KERJOSSE Roselyne, (2001) : ``La Prestation Spécifique Dépendance au 30 septembre 2001", DREES, n° 159, Février 2002.

[10] KERJOSSE Roselyne, (2003) : ``L'Allocation Personnalisée d'Autonomie au 31 mars 2003", DREES, n° 245, Juin 2003.

[11] LAVERSANNE Pierre et SHAHIDI Niousha, (2003) : ``Comment provisionner le risque dépendance ?", Revue ``Risques", n° 55, Septembre 2003.

[12] MICHAUDON Hélène, (2002) : ``Les personnes handicapées vieillissantes : une approche à partir de l'enquête H.I.D.", DREES, n° 204, Décembre 2002.

[13] NOUET Sébastien et PLISSON Manuel, (2006) : ``Structuration du portefeuille dépendance de l'assureur", Revue Risques : Les cahiers de l'assurance, n° 67, septembre 2006.

[14] NOUET Sébastien et PLISSON Manuel, (2007) : ``L'assurabilité de la garantie indemnitaire du risque dépendance", Revue Risques : Les cahiers de l'assurance, n° 71, octobre 2007.

[15] NOUET Sébastien, (2007) : ``L'assurance dépendance et son marché : une approche actuarielle et économétrique", Sébastien Nouet, Thèse de Doctorat, soutenue à l'Université Paris-Dauphine le 2 juillet 2007.

[16] OUDIN Aymeric et TOSETTI Alain, (2002) : ``Éléments tarifaires en assurance dépendance", Bulletin Français d'Actuariat (2002)

[17] PETAUTON Pierre, (2004) : ``Théorie et pratique de l'assurance vie", (3ème édition), Dunod, 2004

[18] TOSETTI Alain, BÉHAR Thomas, FROMENTEAU Michel, MÉNART Stéphane, (2002) : ``Assurance, Comptabilité, Réglementation, Actuariat", 2e édition, Economica, 2002

[19] VASSEUR Aurore, (2008) : ``La dépendance au sein d'un contrat d'assurance vie" - Mémoire d'actuariat (Master 2 Actuariat - Département MIDO - Université Paris-Dauphine), Stage effectué à la MACSF - Tuteur : Hervé Bouclier, novembre 2008